Gerhard Schröpfer, Graz

Totale Wahrscheinlichkeit und BAYESsche Formel

(Herleitung und Anwendung in der 7.Kl.)

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat durch die jüngste Lehrplanreform, welche eine Einführung bereits für die siebte Klasse der allgemeinbildenden hoheren Schule vorsieht, abermals größeres Gewicht erhalten.

Wir haben jene Zeiten, wo man sich in der Schule in den meisten Fällen mit der Betrachtung "möglicher" und "günstiger" Fälle (in einem LAPLACEschen Ereignisraum) begnügt hat, wo also die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Spielwiese für besonders eifrige Kombinierer und Permutierer war, wohl überwunden, stehen aber nun vor den Problemen einer mittlerweile erfolgten Axiomatisierung. So sehr eine axiomatische Untermauerung oder Bestätigung von mehr oder weniger intuitiv gewonnenen Erkenntnissen zu begrüßen ist, so wenig dürfen wir die Gefahren jener Formalisierung übersehen, die nicht Ausfluß tieferen Verständnisses ist sondern dieses ersetzt.

In diesem Referat sollen Möglichkeiten zur graphischen Erfassung von Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung dargelegt werden. Die augenfälligen Lösungen werden dann durch Betrachtungen in einem geeignet eingeschränkten Ereignisfeld bestätigt.

Es handelt sich keineswegs um einen vollständigen Kursus sondern um die exemplarische Behandlung einiger Aufgaben, die nach der bescheidenen Meinung des Verfassers Schülern und Lehrern bei der Lösung recht beträchtliche Schwierigkeiten machen dürften, soferne die mögliche und begrüßenswerte Veranschaulichung in einem geeigneten Diagramm verabsäumt wird. Vorausgesetzt werden Grundkenntnisse aus der W.-rechnung, insbesondere der Additionssatz für die Wahrscheinlichkeit unvereinbarer Ereignisse und der Multiplikationssatz:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ für } A \cap B = \emptyset$$

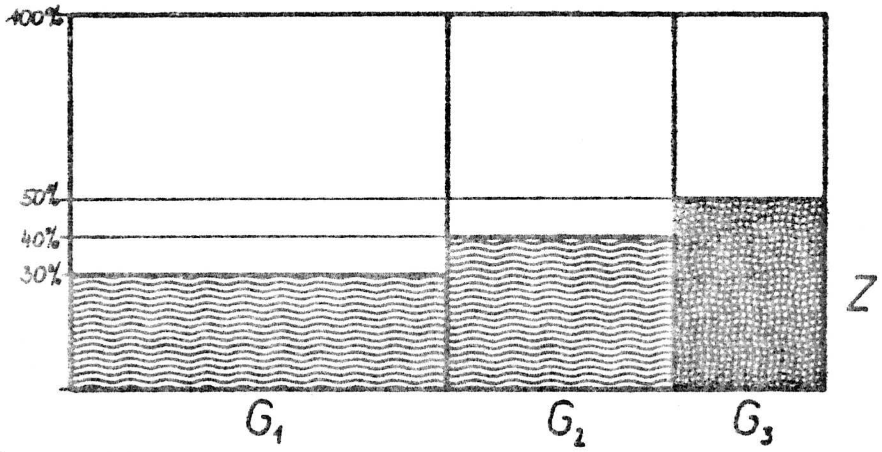
$$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) = P(A/B) \cdot P(B)$$

Beispiel 1

Es werde die Bevölkerung in einem Gebiet Ω auf Zahnschäden (Ereignis Z) untersucht. Man ermittelt hiebei die Einwohnerzahlen der Teilgebiete G_1, G_2, G_3 und den jeweiligen Prozentsatz der Zahnschäden:

$G_1 \longrightarrow$ 5000 Einwohner; $p_1 = 30\%$ Zahnschäden
$G_2 \longrightarrow$ 3000 Einwohner; $p_2 = 40\%$ Zahnschäden
$G_3 \longrightarrow$ 2000 Einwohner; $p_3 = 50\%$ Zahnschäden

$\Omega \longrightarrow$ 10000 Einwohner



$|\Omega| = 10000$

$|G_1| = 5000$; nun sei $Z_1 = G_1 \cap Z$.

$|Z_1| = |G_1| \cdot p_1 = 5000 \cdot 0{,}3 = 1500.$

Analog gilt: $|Z_2| = 1200$; $|Z_3| = 1000$.

a) Nun werde ein Bewohner aus Ω zufällig herausgegriffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er Zahnschäden? Hiebei ist die relative Häufigkeit von Z in bezug auf Ω zu ermitteln:

$|Z| = |Z_1| + |Z_2| + |Z_3|$; Z_1, Z_2, Z_3 sind sicher paarweise disjunkt.

$|Z| = 0{,}3 \cdot 5000 + 0{,}4 \cdot 3000 + 0{,}5 \cdot 2000$

$|Z| = p_1 \cdot |G_1| + p_2 \cdot |G_2| + p_3 \cdot |G_3|$

$$p(Z) = \frac{|Z|}{|\Omega|} = \frac{|Z_1|}{|\Omega|} + \frac{|Z_2|}{|\Omega|} + \frac{|Z_3|}{|\Omega|} = p_1 \cdot \frac{|G_1|}{|\Omega|} + p_2 \cdot \frac{|G_2|}{|\Omega|} + p_3 \cdot \frac{|G_3|}{|\Omega|} =$$

$$= p(Z/G_1) \cdot p(G_1) + p(Z/G_2) \cdot p(G_2) + p(Z/G_3) \cdot p(G_3) =$$

$$= \underline{\underline{\sum_{i=1}^{3} p(Z/G_i) \cdot p(G_i)}} \quad (\text{"Totale Wahrscheinlichkeit"})$$

b) Wenn nun ein Untersuchter offensichtlich Zahnschäden aufweist, mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt er dann aus dem Gebiet G_3, in welchem Zahnschäden bekanntlich am häufigsten auftreten?

Da nun beim untersuchten Individuum Zahnschäden vorausgesetzt werden, ist der zu betrachtende Ereignisraum auf Z einzuschränken. Man interessiert sich für die relative Häufigkeit von Z_3 in bezug auf die Hypothese Z:

Bedingte Wahrscheinlichkeit $P(G_3/Z) = \frac{|Z_3|}{|Z|}$

Dieses vorläufige Ergebnis ist als flächenmäßiger Anteil von Z_3 an Z im Diagramm unmittelbar abzulesen.

Die Formalisierung bestätigt diese Überlegung:

$P(Z_3) = P(Z \cap G_3) = P(G_3/Z) \cdot P(Z)$

$P(G_3/Z) = \frac{P(Z_3)}{P(Z)} = \frac{P(Z/G_3) \cdot P(G_3)}{P(Z)}$ ("Formel von BAYES")

Im vorliegenden Beispiel berechtigt das Ergebnis $\frac{0,10}{0,37} \approx 0,27$ jedenfalls nicht zur Vermutung, ein Untersuchter mit Zahnschäden sei als Bewohner von G_3 einzuordnen.

Anmerkung:

Das verwendete rechteckige Diagramm ermöglicht die Veranschaulichung der Mächtigkeiten der Teilgebiete des Ereignisraumes und zeigt außerdem die angegebenen Prozentsätze.

Beispiel 2

Von einer Untersuchung, die der Früherkennung einer bestimmten Krankheit K dient, ist folgendes bekannt:

1) Bei 1% der eigentlich Gesunden wird aufgrund der Untersuchung vorläufig ein Verdacht auf Vorliegen von K ausgesprochen.
2) Bei 10% der tatsächlich Erkrankten ergibt die Untersuchung keinen Verdacht.
3) Schließlich ist bekannt, daß nur bei 0,1% der Bevölkerung die Krankheit K vorliegt.

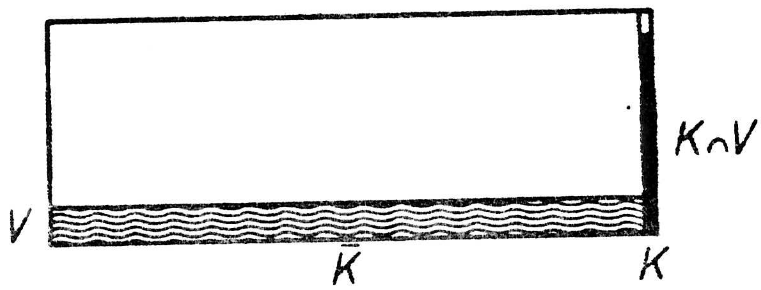
Nun zur eigentlichen Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Untersuchter, bei dem Verdacht auf K besteht, tatsächlich krank?

Man betrachte folgende Ereignisse:

K ... krank; $\overline{K}$ ... gesund.

V ... Verdacht; $\overline{V}$ ... kein Verdacht.

Das Rechtecksdiagramm gibt die Verhältnisse in Ω aus technischen Gründen verzerrt wieder:



Auch hier zeigt das Diagramm sehr deutlich, wie sich der Verdacht V auf Gesunde und Kranke verteilt. Da $P(K \cap V)$ bezogen auf $P(V)$ recht klein ist, bedeutet Krankheitsverdacht noch lange nicht, daß der Untersuchte wirklich krank ist!

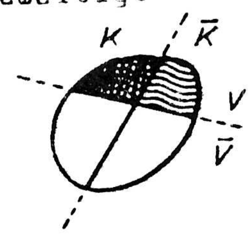
Die Formalisierung bestätigt dieses durch Anschauung gewonnene Ergebnis:

$$P(V) = P(V \cap \overline{K}) + P(V \cap K) =$$
$$= P(V/\overline{K}) \cdot P(\overline{K}) + P(V/K) \cdot P(K) =$$
$$= 0{,}01 \cdot 0{,}999 + 0{,}90 \cdot 0{,}001 =$$
$$= \underline{0{,}01089}$$

$$P(K/V) = \frac{P(V \cap K)}{P(V)} = \frac{0{,}00090}{0{,}01089} \approx \underline{\underline{0{,}083}}.$$

Anmerkung:

Diese Aufgabe ist natürlich keineswegs als neu zu bezeichnen, ganz im Gegenteil - sie findet sich in etlichen Lehrbüchern. Sie wird hier angeführt, weil sie besonders deutlich zeigt, wie wichtig die Wahl geeigneter Ereignisse (hier komplementärer E.) zur Zerlegung von Ω ist, sodaß ein etwas schwierigerer Text durch Anschauung bewältigt werden kann.



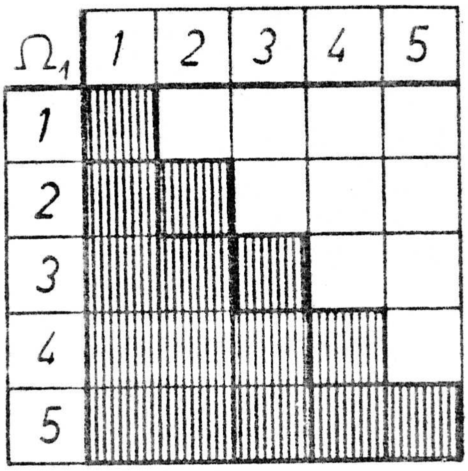
Das Rechteckdiagramm ist einem gewöhnlichen VENN-Diagramm, das nur die Beziehungen im Ereignisfeld $\mathcal{E}$ skizziert, jedenfalls vorzuziehen.

Beispiel 3

Bei einem Dominospiel mögen die Augenzahlen 1 bis 5 vorkommen (Null, d. h. "Blanche" werde aus Gründen der leichteren Überschaubarkeit ausgeschlossen).

Aufgabenstellung: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Griff zwei passende Steine (Ereignis A) dieses Spiels zu ziehen?

In einem ersten Schritt sind Anzahl und Art der Steine dieses Spiels zu bestimmen. Hiebei leistet ein Diagramm, welches die einzelnen Steine als Elementarereignisse in einem LAPLACEschen Ereignisraum Ω_1 durch kongruente Quadrate veranschaulicht, gute Dienste:



Die Anzahl $a(5) = 15$ kann leicht abgezählt werden, zwei weitere Überlegungen bestätigen dieses Teilergebnis.

α) Aus der Anschauung kann man erkennen:

$$a(n) = \frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

β) Ungeordnete Stichproben von n Elementen zur Klasse 2 mit Wiederholung:

$$a(n) = \binom{n+2-1}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Ω_1 umfaßt 5 "doppelte" Steine (Ereignis D_1) und 10 "nichtdoppelte" (Ereignis $\bar{D}_1$). Es folgt daraus

$$P(D_1) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}; \quad P(\bar{D}_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Der zweite Schritt untersucht das Ereignis "Ziehen zweier Steine ohne Zurücklegen": $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, wobei Ω_1 das Ziehen eines ersten Steins und Ω_2 das Ziehen eines zweiten Steins bezeichnet. Der Gesamtereignisraum kann zerlegt werden:

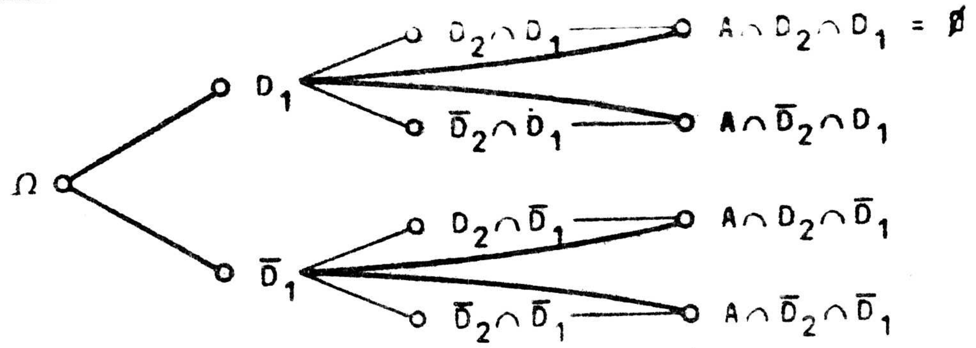
$$\Omega = (D_1 \cap D_2) \cup (D_1 \cap \bar{D}_2) \cup (\bar{D}_1 \cap D_2) \cup (\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2)$$

$D_1 \cap D_2$ liefert sicher keine passenden Steine, d. h. das Teilereignis $D_1 \cap D_2 \cap A$ ist sicher unmöglich. Die anderen drei Fälle sind zu untersuchen. Hiebei empfiehlt es sich, die

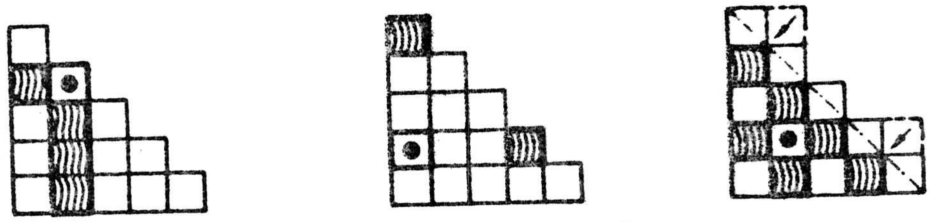
Untersuchung von vornherein auf passende Steine zu beschränken:

$$A = \Omega \cap A = D_1 \cap (\bar{D}_2 \cap A) \cup \bar{D}_1 \cap (D_2 \cap A) \cup \bar{D}_1 \cap (\bar{D}_2 \cap A)$$

Die gesetzten Klammern drücken diese Betrachtungsweise aus. Ein Baumdiagramm macht die Möglichkeiten deutlich:



Zur Untersuchung von $\Omega_2 \cap A$ ("Ziehen eines zweiten passenden Steins") kann das Diagramm von Ω_1 herangezogen werden:



$P(A \cap \bar{D}_2/D_1) = \frac{4}{14}$; $P(A \cap D_2/\bar{D}_1) = \frac{2}{14}$; $P(A \cap \bar{D}_2/\bar{D}_1) = \frac{6}{14}$.

Daraus folgt nach der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit das Endergebnis durch Einsetzen:

$$P(A) = P(A \cap \bar{D}_2/D_1) \cdot P(D_1) + P(A \cap D_2/\bar{D}_1) \cdot P(\bar{D}_1) + P(A \cap \bar{D}_2/\bar{D}_1) \cdot P(\bar{D}_1)$$

$$P(A) = \frac{4}{14} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{14} \cdot \frac{2}{3} + \frac{6}{14} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{42} = \underline{\underline{\frac{10}{21}}}$$

Umkehraufgaben als Anwendungen der BAYESschen Formel dürfen dem geneigten Leser überlassen bleiben.

Anmerkung:

Als besonders wichtig erachtet es der Verfasser, im Baumdiagramm nicht nur eine Klassifizierung der betrachteten Ereignisse vorzunehmen sondern jedes Ereignis als Durchschnitt der im Diagramm bisher durchlaufenen Ereignisse kenntlich zu machen.

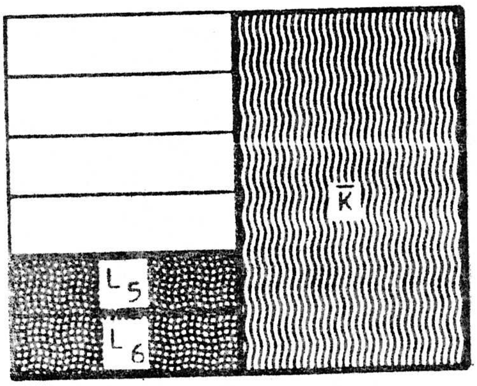
Beispiel 4

Der Aufbewahrungsort eines wichtigen Schriftstücks werde auf folgende Weise bestimmt:

1) Das Werfen einer idealen Münze entscheidet, ob das bewußte Dokument in ein vorhandenes Ladenkästchen gelegt wird (Ereignis K) oder anderswo aufbewahrt wird (Ereignis $\overline{K}$).
2) Das besagte Kästchen hat sechs Laden; ein idealer Würfel entscheidet die Wahl der Lade (Ereignis L_i; $i = 1,\ldots,6$).

Aufgabenstellung: Jemand, der an dem Besitz des Schriftstücks Interesse hat, öffnet nun die Laden des Kästchens der Reihe nach. Bei der ersten Lade ohne Inhalt ist die Bestürzung gering - das gesuchte Dokument wird sich wohl noch in einer der anderen Laden finden! Nach der vierten leeren Lade wird unserem Mann allmählich schwül.

Wie berechtigt ist dieses Gefühl?



Wieder kann das Ergebnis der Überlegung aus einem Diagramm abgelesen werden, in welchem die Wahrscheinlichkeiten der zu betrachtenden Ereignisse durch Rechtecke aliquoten Inhalts zum Ausdruck kommen:

Die bereits geöffneten und leer gefundenen Laden schränken den Ereignisraum auf die Hypothese $L_5 \cup L_6 \cup \overline{K}$. Die verbliebene Hoffnung, das Schriftstück in L_5 oder L_6 doch noch zu finden (Ereignis $L_5 \cup L_6$), kommt durch die bedingte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ zum Ausdruck.

Formalisierung:

$P(K) = P(\overline{K}) = \frac{1}{2}$ (LAPLACEsche Münze!)

$P(L_i) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ (LAPLACEscher Würfel!); $i = 1,\ldots,6$

Zu ermittelnde bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$= P(L_5 \cup L_6 / \bar{L}_1 \cap \bar{L}_2 \cap \bar{L}_3 \cap \bar{L}_4) = \frac{P((L_5 \cup L_6) \cap (\bar{L}_1 \cap \bar{L}_2 \cap \bar{L}_3 \cap \bar{L}_4))}{P(\bar{L}_1 \cap \bar{L}_2 \cap \bar{L}_3 \cap \bar{L}_4)}$$

Bemerkungen:

$$\bar{L}_1 \cap \bar{L}_2 \cap \bar{L}_3 \cap \bar{L}_4 = \overline{L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4} \quad \text{(Regel von DE MORGAN)}$$

$$L_5 \cup L_6 \subset \overline{L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4} = L_5 \cup L_6 \cup \bar{K}$$

$$= \frac{P(L_5 \cup L_6)}{P(L_5 \cup L_6 \cup K)} = \frac{1/12 + 1/12}{2/12 + 1/2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Anmerkung:

Besondere Beachtung verdient die genaue Beschreibung des Experiments. Die bloße Angabe von Wahrscheinlichkeiten könnte den Zugang zum tieferen Verständnis der Aufgabe erschweren.

Beispiel 5

Man betrachte zwei Urnen mit verschieden gefärbten Kugeln. U enthält 6 weiße und eine schwarze Kugel, V enthält 2 weiße und 5 schwarze Kugeln:

Nun werde - ohne daß der Inhalt zu erkennen wäre - eine der beiden Urnen gewählt. Danach werden aus der gewählten Urne zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Das Gesamtexperiment kann durch einen Entscheidungsbaum anschaulich beschrieben werden. Die einzelnen "Pfade" können mit einfachsten Grundkenntnissen der klassischen W.rechnung mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten belegt werden. Es wird dabei anhand der Endpunkte des Diagramms deutlich, daß der Ereignisraum Ω in 2^3 unvereinbare Teilereignisse, welche allerdings keineswegs gleich wahrscheinlich sind, zerlegt werden kann.

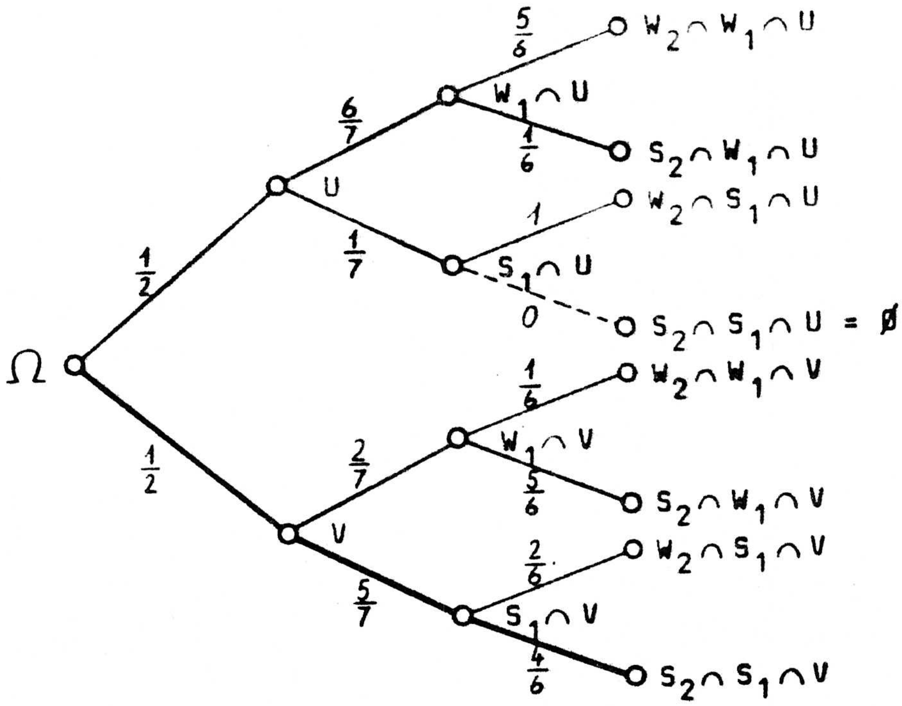
Wieder erscheint es zur vollen Verdeutlichung angebracht, die einzelnen Ereignisse durch Konjunktionen, d. h. Durchschnittsbildung, zu bezeichnen (Vergl. Anm. zu Beispiel 3).

Im Diagramm scheinen folgende Ereignisse auf:

U .... Urne U; V .... Urne V.

W_1.... erste Kugel weiß; S_1.... erste Kugel schwarz.

W_2.... zweite Kugel weiß; S_2.... zweite Kugel schwarz.



<u>Aufgabenstellungen:</u>

a) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, daß die <u>zweite gezogene Kugel schwarz</u> ist.

$$S_2 = U \cap ((W_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_2)) \cup V \cap ((W_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_2))$$

$$= U \cap W_1 \cap S_2 \cup \underbrace{U \cap S_1 \cap S_2}_{\emptyset} \cup V \cap W_1 \cap S_2 \cup \underbrace{V \cap S_1 \cap S_2}_{S_1 \cap S_2}$$

Die Wahrscheinlichkeit von S_2 ergibt sich unter Anwendung der "Pfadregel" und der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit:

$$P(S_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6} = \frac{36}{84} = \underline{\underline{\frac{3}{7}}}$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit war die erste gezogene Kugel schwarz, wenn die zweite schwarz ist?

Diese Aufgabe erscheint fürs erste geeignet, Verwirrung zu stiften. Sie verlangt nicht einen Blick in die "Zukunft" sondern einen Schluß auf "Gewesenes". Ein Blick auf das Diagramm erleichtert das Verständnis und bereitet eine Umformulierung der Fragestellung vor: Welche Pfade zum Ziel S_2 führen über S_1?

Man erkennt leicht, daß nur bei einem von drei möglichen Teilereignissen, die S_2 bilden, der Durchschnitt mit S_1 nicht leer ist, sodaß die Wahrscheinlichkeit dieses Teilereignisses $S_1 \cap S_2$ auf jene der Hypothese S_2 zu beziehen ist.

Formalisierung:

$$P(S_1/S_2) = \frac{P(S2 \cap S1)}{P(S2)} = \frac{P(\overbrace{S2 \cap S1 \cap U}^{\emptyset}) + P(S2 \cap S1 \cap V)}{P(S2)} =$$

$$= \frac{\frac{20}{84}}{\frac{36}{84}} = \underline{\underline{\frac{5}{9}}}$$

Anmerkungen:

1) Das Schließen auf Vergangenes macht sicher Schwierigkeiten, liefert aber eine gute Gelegenheit, dem Schüler vor Augen zu führen, daß das Ereignisfeld $\mathfrak{E}$ als BOOLEsche Algebra jedes Ereignis enthält - ungeachtet einer zeitlichen Abfolge.
2) Als geeignetes Mittel zur Verdeutlichung von vorhandenen Zusammenhängen erscheint dem Verfasser die Überspitzung der Angabe.
   Im vorliegenden Beispiel wurde in der Urne U nur eine schwarze Kugel angenommen. Der Lernende erkennt: Wenn die zweite Kugel schwarz und aus V ist, dann war die erste Kugel mit großer Wahrscheinlichkeit auch schwarz; ist aber die zweite Kugel schwarz und aus U, dann kann die erste gar nicht schwarz gewesen sein!

Die Anwendungsmöglichkeiten von Diagrammen zur visuellen Unterstützung der Lösung von Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind damit keineswegs erschöpft. Es sei erinnert an Zuordnungsdiagramme fur Markoffketten, an Staffelbilder für Verteilungen, schließlich an das weite Gebiet der stochastischen Behandlung von Aufgaben der Genetik.

Der Zweck dieses Referats ist erreicht, wenn es Anregungen für Selbststudium und Unterricht vermittelt.

G.Schröpfer
Bundesrealgymnasium Graz